Site Βλάσης
Σημειώσεις

Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

08/10/2018
1ο μάθημα

Επιπεδομετρία $\rightarrow \mathbb{R}^2$
Στερεομετρία $\rightsquigarrow \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n$, $n=2,3,\ldots$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-φορές}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad \left.\begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_n) \\ y = (y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \; x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

• $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n

Συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)\}$

$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Είναι η απεικόνιση $\langle , \rangle \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\langle (x, y) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)$
$\quad y = (y_1, \ldots, y_n)$

Ιδιότητες

(i) $\langle (x,y) \rangle = \langle (y,x) \rangle$

(ii) $\langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ και $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Μήκος Διανύσματος

Ορισμός: Καλούμε μήκος του $x \in \mathbb{R}^n$ τον αριθμό $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Ιδιότητες μήκους

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Ανισότητα CS)
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Τρ. ανισότητα)

Γωνία Διανυσμάτων

Ορισμός: Καλούμε γωνία των διανυσμάτων $x \neq 0$ και $y \neq 0$ τον μοναδικό αριθμό $\theta \in [0, \pi]$ τ.ω. $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Καθετότητα Διανυσμάτων

Ορισμός: Τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ καλούνται (ορθογώνια) κάθετα
<u>αν-ν</u> : $\langle x, y \rangle = 0$

<u>Παρατηρήσεις</u>: (i) $\langle 0, x \rangle = 0$
(ii) $x \neq 0$, $y \neq 0$
Τότε τα x, y είναι ορθογώνια $\Leftrightarrow$ η γωνία είναι $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ευκλείδια Απόσταση

Ορισμός: Ευκλείδια απόσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

Ιδιότητες της απόστασης

(i) $d(x,y) \geq 0 \qquad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται Ευκλείδια ισομετρία αν-ν $d(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

συνάρτηση σημαίνει το σύνολο τιμών είναι υποσύνολο των πραγμ. αριθμών
απεικόνιση " " " " κάτι άλλο

Παρατήρηση: (i) Κάθε ισομετρία είναι 1-1

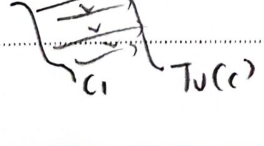
$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Ορισμός: Καλώ παράλληλη μεταφορά κατά $u \in \mathbb{R}^n$ την απεικόνιση $T_u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(i) $T_u(x) = x + u$

$T_u = Id \iff u = 0$

$\iff T_u$ είναι γραμμική απεικόνιση



(ii) $T_v \circ T_w = T_{v+w}$

(iii) T_v ισομετρία

(iv) $T_v \circ T_{-v} = Id$

$T_v^{-1} = T_{-v}$

Ορθογώνιος μετασχηματισμός

Ορισμός: Μια γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός αν-ν $\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(A(x), A(y)) = \|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\|$$
$$= \sqrt{\langle A(x-y), A(x-y) \rangle} = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} = \|x-y\| = d(x,y)$$
$$n = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A \ (*)$$

- Το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $O(n)$
- Το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $Isom(\mathbb{R}^n)$

$O(n) \subset Isom(\mathbb{R}^n)$

$A, B \in O(n) \Rightarrow A \circ B \in O(n)$

$f, g \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \circ g \in Isom(\mathbb{R}^n)$

(*) $x \in \ker A \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow \langle A(x), A(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Ταξινόμηση ισομετριών του $\mathbb{R}^n$

Θεώρημα: Κάθε $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ είναι της μορφής $f = T_v \circ A$, όπου T_v είναι παράλληλη μεταφορά και $A \in O(n)$.

Παρατήρηση: Κάθε $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ αντιστρέφεται και $f^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$

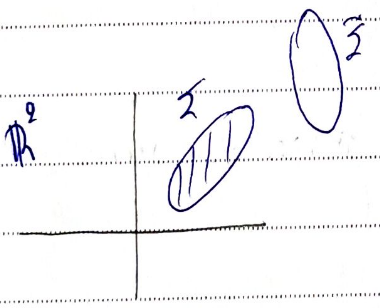
$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(x,y).$$

- $f, g \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \circ g \in Isom(\mathbb{R}^n)$
- $Id \in Isom(\mathbb{R}^n)$
- $f \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$

Γεωμετρική ισοτιμία

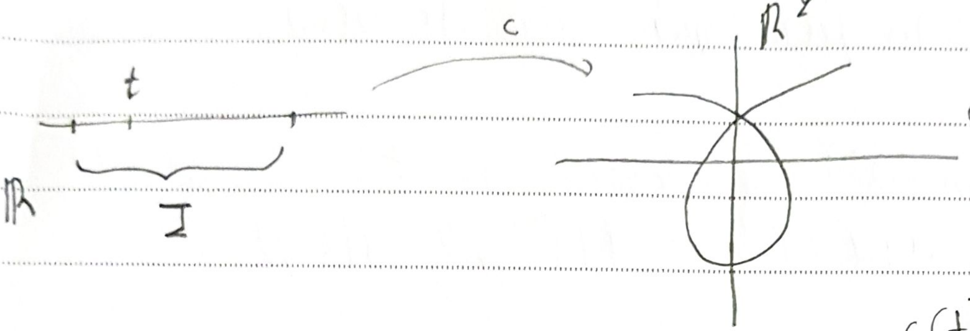
Ορισμός: Δύο σχήματα $\Sigma, \tilde{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^n$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμα αν-ν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $T(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$.

π.χ. $\mathbb{R}^2$



Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ κλάσης C^r, $r \geq 1$, απεικόνιση $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$c(I)$ • t = παράμετρος της καμπύλ
• $c(I)$ = εικόνα της καμπύλ

$c(t) = (x(t), y(t))$

• Οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της.

Γεωμετρικώς ισότιμες Καμπύλες

Ορισμός: Δύο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν-ν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$